数理解析研究所講究録
919巻 1995年 141-167

A型対称Jackson積分の接続行列とRiemann-Hilbert問題

名古屋大学多元数理　青本和彦
名城大　理工　加藤芳文

0. q-超幾何関数の接続問題を扱えば，必然的に楕円テータ関数が現われる．実際，q-超幾何関数の接続関係を支配するのは楕円テータ関数の種々の関係式である．我々はこれらを明らかにしてゆくのに，Jackson積分の考えを前面に押し出し，それをde Rhamコホモロジーのq-類似としてとらえる．ホモロジーを定義する輪体は基本的には格子点によって形成されているので，問題を幾何学的にとらえることができる．

以下　対称A型Jackson積分の場合にこの接続関係について考察する．最後に，この接続関係がq-差分方程式をも求めてしまうという著しい事実を述べる．

くわしくは [1] を参照.

1. 代数的トーラス $\bar{X} = (\mathbb{C}^*)^n$ 上の

q-乗法関数 $\quad (q = e^{2\pi i\tau},\ \operatorname{Im}\tau > 0)$

(1.1) $\Phi(t) = \Phi_{n,m}(t)$

$$= t_1^{\alpha_1} \cdots t_n^{\alpha_n} \prod_{j=1}^{n} \prod_{k=1}^{m} \frac{(t_j/x_k)_\infty}{(t_j q^{\beta_k}/x_k)_\infty} \prod_{1\leq i<j\leq n} \frac{(q^{\gamma'} t_j/t_i)_\infty}{(q^{\gamma} t_j/t_i)_\infty}$$

$$t = (t_1, \cdots, t_n) \in (\mathbb{C}^*)^n$$

が, 条件

$$\alpha_j = \alpha_1 + (j-1)(\gamma' - \gamma), \quad \gamma' + \gamma = 1$$

をみたすとき, $\Phi(t)$ は次の意味で擬対称 (quasi-symmetric) である.

(1.2) $\quad \sigma\Phi(t) \underset{\mathrm{def}}{=} \Phi(\sigma^{-1}(t))$

$$= U_\sigma(t)\Phi(t), \quad \sigma \in \mathfrak{S}_n$$

($\mathfrak{S}_n$ は n 次対称群). 但し $U_\sigma(t)$ は

(1.3) $$U_\sigma(t) = \prod_{\substack{1\leq i<j\leq n \\ \sigma^{-1}(i)>\sigma^{-1}(j)}} \left(\frac{t_j}{t_i}\right)^{\gamma-\gamma'} \frac{\vartheta(q^{\gamma} t_j/t_i)}{\vartheta(q^{\gamma'} t_j/t_i)}$$

によって定義される，$(\mathbb{C}^*)^n$ 上の擬定数 (pseudo-constant) であって，$\mathfrak{O}_n$ 上の 1-コサイクルになっている．ここで

$$\vartheta(u) = (u)_\infty (q/u)_\infty (q)_\infty$$

$$(u)_\infty = \prod_{\nu=0}^{\infty} (1-uq^\nu)$$

は Jacobi の楕円テータ関数である．

(1.4)
$$\Phi_D(t) = \Phi(t) \prod_{1\le i<j\le n} (t_i - t_j)$$

$$D(t) = \prod_{1\le i<j\le n} (t_i - t_j)$$

とおくとき，$\Phi_D(t)$ の Jackson 積分，すなわち $(\mathbb{C}^*)^n$ 内の n 次元 q-格子上の和は，これを α_1, β, γ 或は $x_1, \cdots, x_m$ の関数とみた場合，著しい対称性を持っている．Jackson 積分は，背後に de Rham コホモロジーの構造を有しており，その一般論を適用することにより，多くの興味ある結果を導くことが出来る．ここでは，$m=2$ の場合の接続公式の陽の公式を与えたい。くわしくは [1] を参照．

まず，$m=1$ の場合の結果 の復習からはじめる．

2. $m=1$，$\alpha_1=1$ とする．ξを $(\mathbb{C}^*)^n$ の任意の点とする．$\langle\xi\rangle$は ξを通る n次元の q-格子

(2.1) $\langle\xi\rangle = \{(\xi_1 q^{\nu_1}, \cdots, \xi_n q^{\nu_n}),\quad \nu_j \in \mathbb{Z}\}$

を表わすものとする．又，点$\xi = \xi_F$ は

(2.2) $\xi_1 = q,\quad \xi_2 = q^{1+\gamma},\quad \cdots,\quad \xi_n = q^{1+(n-1)\gamma}$

を，$\eta = \eta_F$ は

(2.3) $\eta_1 = \bar{q}^{\beta_1},\quad \eta_2 = \bar{q}^{\beta_1-\gamma},\quad \cdots,\quad \eta_n = \bar{q}^{\beta_1-(n-1)\gamma}$

を表わす．このとき，Jackson 積分の公式

(2.4)
$$\int_{\langle\xi_F\rangle} \Phi_D(t)\,\frac{d_q t_1}{t_1}\wedge\cdots\wedge\frac{d_q t_n}{t_n}$$
$$= \frac{q^{A_n}}{\Gamma_q(\gamma)^n}\prod_{j=1}^{n}\frac{\Gamma_q(\beta_1+(j-1)\gamma+1)\,\Gamma_q(\alpha_1-(n+j-2)\gamma+n-1)\,\Gamma_q(j\gamma)}{\Gamma_q(\alpha_1+\beta_1-(n-j)\gamma+n)}$$

但し
$$A_n = \sum_{j=1}^{n}(\alpha_j+n-j)\big((j-1)\gamma+1\big).$$

(2.5) $$\int_{\langle\eta_F\rangle} \Phi_D(t)\frac{d_qt_1}{t_1}\wedge\cdots\wedge\frac{d_qt_n}{t_n}$$ （$\langle\eta_F\rangle$は正則化を必要とする）

$$= \frac{\Gamma_q(1-\gamma)^n}{q^{B_n}}\prod_{j=1}^{n}\frac{\Gamma_q(-\alpha_1-\beta_1+(j-1)\gamma-n+1)}{\Gamma_q(-\beta_1-(j-1)\gamma)\Gamma_q(-\alpha_1+(n+j-2)\gamma-n+2)\Gamma_q(1-j\gamma)}$$

$$B_n=\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j+n-j)(\beta_1+(j-1)\gamma)$$

さらに，任意の$\langle\xi\rangle$に対しては，関係

(2.6) $$\int_{\langle\xi\rangle}\Phi_D(t)\frac{d_qt_1}{t_1}\wedge\cdots\wedge\frac{d_qt_n}{t_n}\Bigg/\int_{\langle\eta_F\rangle}\Phi_D(t)\frac{d_qt_1}{t_1}\wedge\cdots\wedge\frac{d_qt_n}{t_n}$$

$$=(q)_\infty^{3n}\prod_{j=1}^{n}\left(q^{\beta_1+(j-1)\gamma}\xi_j\right)^{\alpha_1-2(j-1)\gamma}$$

$$\prod_{j=1}^{n}\frac{\vartheta(q^{\alpha_1+\beta_1-(n-1)\gamma+1}\xi_j)}{\vartheta(q^{\alpha_1-(n+j-2)\gamma+1})\vartheta(q^{\beta_1+1}\xi_j)}\prod_{1\le i<j\le n}\frac{\vartheta(q\xi_j/\xi_i)}{\vartheta(q^{\gamma+1}\xi_j/\xi_i)}$$

が成立つ．(2.6)の右辺はξの関数として擬定数である．（[3], [5], [4]など参照）

(2.4), (2.5) の右辺を 各々 $W_n^+(\alpha_1,\beta_1,\gamma)$, $W_n^-(\alpha_1,\beta_1,\gamma)$ と表わすことにする。

3. 我々の本題である $m=2$ の場合を考察する。すでに先駆的結果として松尾　　の仕事がある。

分割

$$F_0^n=(n,0),\ F_1^{n-1}=(n-1,1),\ \cdots,\ F_n^0(0,n)$$

に対応する点 $\xi_{F_r^{n-r}}$ を次のように定義する。

$$(3.1)\quad \xi_{F_r^{n-r}}:\ \xi_1=x_1q,\ \xi_2=x_1q^{\gamma+1},\ \cdots,\ \xi_{n-r}=x_1q^{(n-r-1)\gamma+1}$$

$$\xi_{n-r+1}=x_2q,\ \xi_{n-r+2}=x_2q^{\gamma+1},\ \cdots,\ \xi_n=x_2q^{1+(r-1)\gamma}$$

又, 点 $\eta_{F_r^{n-r}}$ を

$$(3.2)\quad \eta_{F_r^{n-r}}:\ \eta_1=x_1q^{-\beta_1},\ \eta_2=x_1q^{-\beta_1-\gamma},\ \cdots,\ \eta_r=x_1q^{-\beta_1-(n-r-1)\gamma}$$

$$\eta_{n-r+1}=x_2q^{-\beta_2},\ \eta_{n-r+2}=x_2q^{-\beta_2-\gamma},\ \cdots,\ \eta_n=x_2q^{-\beta_2-(r-1)\gamma}$$

このとき, Φ_D の Jackson 積分に附随する n次元コホモロジー $H^n_{sym}(X,\Phi,\nabla)$ の次元は $n+1$ であって, その双対である n次元ホモロジーの基底として

$\{\langle \xi_{F_r}^{n-r}\rangle\}_{r=0}^{n}$ 又は $\{\mathrm{reg}\langle \eta_{F_r}^{n-r}\rangle\}_{r=0}^{n}$ を選ぶことができる.

このとき 次の接続公式が成り立つ.

(3.3) $$\int_{\langle\xi\rangle} \Phi_D(t)\, \frac{d_q t_1}{t_1}\wedge\cdots\wedge\frac{d_q t_n}{t_n}$$

$$= \sum_{r=0}^{n} \left(\langle\xi\rangle : \mathrm{reg}\langle\eta_{F_r}^{n-r}\rangle\right)_{\Phi_D} \int_{\mathrm{reg}\langle\eta_{F_r}^{n-r}\rangle} \Phi_D(t)\, \frac{d_q t_1}{t_1}\wedge\cdots\wedge\frac{d_q t_n}{t_n}$$

ここで $\left(\langle\xi\rangle : \mathrm{reg}\langle\eta_{F_r}^{n-r}\rangle\right)_{\Phi_D}$ は

(3.4) $$\sum_{\sigma=(\sigma',\sigma'')\in \mathfrak{S}_n\times\mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}\,\sigma\; U_{\sigma'}(\xi)^{-1}\, U_{\sigma''}(\eta_{F_r}^{n-r})\; \sigma\psi_n(\xi;\eta_{F_r}^{n-r})$$

で与えられる擬定数である. 但し

(3.5) $$\psi_n(\xi;\eta) = (q)_\infty^{3n} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\xi_j}{\eta_j}\right)^{\alpha_j} \frac{\vartheta\left(q^{\alpha_j+\cdots+\alpha_n+1}\,\frac{\xi_j\eta_{j-1}}{\xi_{j-1}\eta_j}\right)}{\vartheta\left(q\,\frac{\xi_j\eta_{j-1}}{\xi_{j-1}\eta_j}\right)}$$

$(\xi_0=\eta_0=1)$ とする. ([1] 参照)

特に $\xi = \xi_{F_r^{n-r}}$ とおくとき，成分

$$g_{r,s} = \left(\langle \xi_{F_r^{n-r}} \rangle : \mathrm{reg}\langle \eta_{F_s^{n-s}} \rangle\right)_{\Phi_D} \tag{3.6}$$

$$(0 \leqq r, s \leqq n)$$

によって与えられる行列 $G = ((g_{rs}))_{r,s=0}^{n}$ は2個の基底 $\left\{\langle \xi_{F_r^{n-r}} \rangle\right\}_{r=0}^{n}$ と $\left\{\mathrm{reg}\langle \eta_{F_r^{n-r}} \rangle\right\}_{r=0}^{n}$ の間の関係を与える接続行列である．この行列 G をこのノートでは主接続行列と呼んでおく．主接続行列 G はパラメータ α_1, β_1, β_2, γ に依存するので，それをくわしく書くときには $G = G^{(n)}(x_1, x_2; \alpha_1, \beta_1, \beta_2)$ （γ は定数とみておく）と記す．

G には次のような対称性がある．

（i）第1種対称性

$$G^{(n)}(x_1, x_2; \alpha_1, \beta_1, \beta_2) = {}^{t}G^{(n)}(x_1^{-1}q^{\beta_1}, x_2^{-1}q^{\beta_2}; \alpha_1, \beta_1, \beta_2) \tag{3.7}$$

(ii) 第2種対称性

(3.8) $$G^{(n)}(x_2, x_1; \alpha_1, \beta_2, \beta_1)$$
$$= A(x_2/x_1)\, G^{(n)}(x_1, x_2; \alpha_1, \beta_1, \beta_2)\ {}^tA(q^{\beta_2-\beta_1} x_1/x_2)$$

但し

$$A(z) = \begin{pmatrix} 0 & & & a_{0,n}(z) \\ & & a_{1,n-1}(z) & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ a_{n,0}(z) & & & 0 \end{pmatrix}$$

ここで

$$a_{r,n-r}(z) = z^{2r(n-r)} q^{-r(n-r)\gamma + r(n-r)(n-2r)\gamma^2} \cdot$$
$$\cdot \frac{\vartheta(q^{-(r-1)\gamma} z)_n \quad \vartheta(q^{-r\gamma} z)_n}{\vartheta(q^{-(r-1)\gamma} z)_r\, \vartheta(q^{-(r-1)\gamma} z)_{n-r}\, \vartheta(q^{-r\gamma} z)_r\, \vartheta(q^{-r\gamma} z)_{n-r}},$$

$$\vartheta(u)_k = \vartheta(u)\vartheta(uq^{\gamma}) \cdots \vartheta(uq^{(k-1)\gamma})$$

(iii) 第3種対称性

(3.9) $$G^{(n)}(x_1, x_2; \alpha_1, \beta_1, \beta_2)^{-1}$$
$$= C(x_1, x_2; \beta_1, \beta_2)\, G^{(n)}(x_1^{-1} q^{\beta_1}, x_2^{-1} q^{\beta_2}; \alpha_1^*, \beta_1, \beta_2) \cdot$$
$$\cdot\, {}^tC(x_1^{-1} q^{\beta_1 - 1}, x_2^{-1} q^{\beta_2 - 1}, \beta_1, \beta_2)$$

但し $\alpha_1^* = -\alpha_1 - \beta_1 - \beta_2 - 2(n-1)\gamma'$,

$$C(x_1, x_2; \beta_1, \beta_2) = J\, B(x_1, x_2; \beta_1, \beta_2) A(q^{\beta_2 - \beta_1} x_1/x_2) \cdot B(x_2, x_1; \beta_2, \beta_1).$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \iddots & & \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_0(x_1, x_2) & & \\ & \ddots & \\ & & b_n(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

$$b_r(x_1, x_2) = x_1^{-r(\beta_1+\beta_2)} q^{r(\beta_1-1)(\beta_1+\beta_2)+r(r-1)\frac{(\beta_1+\beta_2-1)\gamma}{2} + \frac{(r-1)r(r+1)\gamma^2}{3}} \cdot \frac{\vartheta(q^{\beta_1})_r \cdot \vartheta(q^{\beta_1} x_2/x_1)_r\, \vartheta(q^{\gamma})_r}{(q)_\infty^{3r}\, \vartheta(q^{\beta_1-\beta_2} x_2/x_1)_r\, \vartheta(q^{\gamma})^r}.$$

以下, 逆行列 G^{-1} の (i, j) 成分を $\tilde{g}_{ij}$ で表わす.

これらの対称性は，すべて Jackson 積分の対称性から得られる．

4. Gauss 分解（[9]，[11] 参照）

$z = x_2/x_1$ とおくとき，$z = 0, \infty$ の近くでの Jackson 積分の漸近展開を与える n-次元輪体を定義する．

$\zeta_{F_r^{n-r}} = (\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n)$ を

(4.1) $\zeta_1 = x_1 q^{-\beta_1}$, $\zeta_2 = x_1 q^{-\beta_1-\gamma}$, $\cdots$, $\zeta_{n-r} = x_1 q^{-\beta_1-(n-r-1)\gamma}$

$\zeta_{n-r+1} = x_2 q$, $\zeta_{n-r+2} = x_2 q^{1+\gamma}$, $\cdots$, $\zeta_n = x_2 q^{1+(r-1)\gamma}$

によって，$\delta_{F_r^{n-r}} = (\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n)$ を

(4.2) $\delta_1 = x_1 q$, $\delta_2 = x_1 q^{1+\gamma}$, $\cdots$, $\delta_{n-r} = x_1 q^{1+(n-r-1)\gamma}$

$\delta_{n-r+1} = x_2 q^{-\beta_2}$, $\delta_{n-r+2} = x_2 q^{-\beta_2-\gamma}$, $\cdots$, $\delta_n = x_2 q^{-\beta_2-(r-1)\gamma}$

によって定義するとき，積分（適当な正則化を行なう）

(4.3) $$\int_{\langle \zeta_{F_r^{n-r}} \rangle} \Phi_D(t) \frac{d_q t_1}{t_1} \wedge \cdots \wedge \frac{d_q t_n}{t_n}, \quad 0 \leqslant r \leqslant n$$

(4.4) $$\int_{\langle \delta_{F_r^{n-r}} \rangle} \Phi_D(t) \frac{d_q t_1}{t_1} \wedge \cdots \wedge \frac{d_q t_n}{t_n}, \quad 0 \leqslant r \leqslant n$$

は，各々 $z=0$，$z=\infty$ での漸近展開を与える。実際 $z=0$ の近くでは

$$(4.5)\quad \int_{\langle \zeta_{F_r}^{n-r}\rangle} \Phi_D(t)\frac{d_qt_1}{t_1}\wedge\cdots\wedge\frac{d_qt_n}{t_n}$$

$$\sim q^{(n-r)\beta_1\beta_2+\frac{(n-r)(n-r-1)}{2}\beta_2\gamma}\, x_1^{n\alpha_1+n(n-1)(1-\gamma)}\cdot$$

$$z^{r\alpha_1-(n-r)\beta_2+r(n-r)(\gamma'-\gamma)+r(r-1)(1-\gamma)}\cdot v_r(z)\cdot$$

$$\cdot W_{n-r}^{-}(\alpha_1+\beta_2+r,\beta_1,\gamma)\, W_r^{+}(\alpha_1+(n-r)(1-2\gamma),\beta_2,\gamma),$$

但し

$$v_r(z)=\prod_{j=1}^{n-r} z^{\beta_2}\frac{\vartheta(q^{-\beta_1-(j-1)\gamma}z^{-1})}{\vartheta(q^{\beta_2-\beta_1-(j-1)\gamma}z^{-1})}.$$

同じく，$z=\infty$ の近くでは

$$(4.6)\quad \int_{\langle \delta_{F_r}^{n-r}\rangle} \Phi_D(t)\frac{d_qt_1}{t_1}\wedge\cdots\wedge\frac{d_qt_n}{t_n}$$

$$\sim (-1)^{r(n-r)}\, q^{r\beta_1\beta_2+\frac{r(r-1)}{2}\beta_1\gamma'-r(n-r)\beta_2+\frac{r(r-1)(n-r)}{2}\gamma'-\frac{r(n-r)(n-r-1)}{2}\gamma}\cdot$$

$$x_1^{n\alpha_1+n(n-1)(1-\gamma)}\, z^{r\alpha_1+r\beta_1+r(r-1)(1-\gamma)+r(n-r)}\, v_r^{*}(z)\cdot$$

$$W^{+}_{n-r}(\alpha_1+r(\gamma'-\gamma),\beta_1,\gamma)\,W^{-}_{r}(\alpha_1+\beta_1+n-r,\beta_2,\gamma)\,,$$

但し

$$v^{*}_{r}(z)=\prod_{j=n-r+1}^{n} z^{-\beta_1}\frac{\vartheta(q^{\beta_2-(n-r+1-j)\gamma'}z)}{\vartheta(q^{\beta_1-\beta_2-(n-r+1-j)\gamma'}z)}\,.$$

$$\prod_{i=1}^{n-r}\prod_{j=n-r+1}^{n} z^{\gamma'-\gamma}\frac{\vartheta(q^{\beta_2+(j-n+r)\gamma'-(i-1)\gamma}z)}{\vartheta(q^{\beta_2+(j-n+r-1)\gamma'-(i-2)\gamma}z)}\,.$$

$v_r(z)$, $v^{*}_{r}(z)$は zの関数として擬定数であることに注意.

さて $\langle \zeta_{F_r^{n-r}}\rangle$ $(0\leq r\leq n)$, $\langle \delta_{F_r^{n-r}}\rangle$ $(0\leq r\leq n)$

も又 n次元ホモロジーの基底になっている.

そこで これらの基底と $\langle \xi_{F_r^{n-r}}\rangle$ $(0\leq r\leq n)$,

$\langle \eta_{F_r^{n-r}}\rangle$ $(0\leq r\leq n)$ らとの関係がなくてはならない.

$$(5.7)\quad \langle \zeta_{F_r^{n-r}}\rangle=\sum_{s=0}^{n} h^{(n)}_{r,s}(x_1,x_2;\alpha_1,\beta_1,\beta_2)\langle \eta_{F_s^{n-s}}\rangle$$

$$=\sum_{s=0}^{n} \tilde{h}^{(s)}_{r,s}(x_1,x_2;\alpha_1,\beta_1,\beta_2)\langle \xi_{F_s^{n-s}}\rangle$$

ここで h_{rs} , $\tilde{h}_{rs}$ は x_1, x_2 の関数としては、擬定数である。

我々の主要な結果は、$h_{r,s}$, $\tilde{h}_{r,s}$ を具体的にテータ積で表示できることである。

定理1.

(4.8)
$$g^{(n)}_{r,0}(x_1, x_2 ; \alpha_1, \beta_1, \beta_2)$$
$$= q^{C^{(n)}_r(\beta_1)} z^{r\alpha_1 - r(2n-r-1)\gamma} \frac{(q)_\infty^{3n} \, \vartheta(q^{\gamma+1})^n}{\vartheta(q^{\gamma+1})_n \, \vartheta(q^{\alpha_1 - 2(n-1)\gamma+1})_n} \cdot$$
$$\frac{\vartheta(q^{\alpha_1+\beta_1-(n-1)\gamma+1})_{n-r} \, \vartheta(q^{\alpha_1+\beta_1-(n-1)\gamma+1} z)_r \, {}_n\vartheta(q^{\gamma})_r}{\vartheta(q^{\beta_1+1})_{n-r} \, \vartheta(q^{\beta_1+1} z)_r \, {}_n\vartheta(q^{-(n-r-1)\gamma} z)_r}$$

但し、

$$C^{(n)}_r(\beta_1) = n\alpha_1\beta_1 - n(n-1)\beta_1\gamma + \{r(r-1) + r(n-r) + (n-r)(n-r-1)\}\alpha_1\gamma$$
$$- \left\{ \frac{2(n-r-1)(n-r)(2n-2r-1) + r(3n-r-1)(3n-r-2)}{3} - nr(n-r) \right\} \gamma^2 ,$$

$${}_n\vartheta_r(u) = \frac{\vartheta(u)_n}{\vartheta(u)_r \, \vartheta(u)_{n-r}}$$ を表わす。

同様にして、$g^{(n)}_{0,r}$, $g^{(n)}_{r,n}$, $g^{(n)}_{n,r}$ も

Jacobi テータ楕円関数の単項式
表わされることが G の対称性からわかる. それらの
具体的表示 省略する.

定理2.

(4.9) $h^{(n)}_{r,s}(x_1,x_2;\alpha_1,\beta_1,\beta_2)$

$$
=\begin{cases} g^{(r)}_{r,s}(x_1 q^{\beta_1+(n-r-2)\gamma'}, x_2; \alpha_1+(n-r)(\gamma'-\gamma), \gamma-\gamma', \beta_2) & (r\geq s) \\ 0 & (r<s) \end{cases},
$$

(4.10) $\tilde{h}^{(n)}_{r,s}(x_1,x_2;\alpha_1,\beta_1,\beta_2)$

$$
=\begin{cases} a_{n-s,s}(z)\, a_{r,n-r}(q^{\beta_1-(n-r-1)\gamma} z^{-1})\cdot \\ \quad \tilde{g}^{(n-r)}_{n-r,n-s}(x_2 q^{r\gamma}, x_1; \alpha_1+r(\gamma'-\gamma), \gamma-\gamma', \beta_1), & (r\leq s) \\ 0 & (r>s) \end{cases}
$$

従って $h^{(n)}_{r,s}$ を (r,s) 成分とする行列 $H^{(n)}$ は
下三角, $\tilde{h}^{(n)}_{r,s}$ を (r,s) 成分とする行列
$\tilde{H}^{(n)}$ は上三角である. すべての成分は楕円テータ
多項式である.

(3.6)と(4.7)から直ちに $G^{(n)}$ の Gauss 分解

$$(4.11)\qquad G^{(n)} = \tilde{H}^{(n)-1} H^{(n)}$$

が得られる. こうして $G^{(n)}$ は，単項式を要素とする下3角，上3角の行列の積表示を持つことがわかった.

(4.11)の系

$$(4.12)\qquad \det G^{(n)} = \frac{h^{(n)}_{00}\, h^{(n)}_{11} \cdots h^{(n)}_{nn}}{\tilde{h}^{(n)}_{00}\, \tilde{h}^{(n)}_{11} \cdots \tilde{h}^{(n)}_{nn}}$$

この具体的な形は，$n=2$ のときはよく知られていて，Fay の trisecant formula の特別な場合になっている.

5. q-差分方程式と Riemann-Hilbert 問題

$m=2$ の場合，$\Phi_D(t)$ の Jackson 積分は x の関数とみて，常 q-差分方程式をみたす. そして $x=0, \infty$ での漸近展開は，各々 (4.5), (4.6) で与えられる.

$x=0$ での指数は

$$\mu_r = r\alpha_1 - (n-r)\beta_2 + r(n-r)(\gamma'-\gamma) + r(r-1)(1-\gamma) \qquad (0 \leq r \leq n)$$

$x=\infty$ でのそれは

$$\mu^*_r = r\alpha_1 + r\beta_1 + r(r-1)(1-\gamma) + r(n-r) \qquad (0 \leq r \leq n)$$

である.

さて, $H^n_{sym}(X, \Phi, \nabla)$ の基底 φ_s を

$$(5.1) \quad \varphi_s(t) = \mathcal{A}\left\{ \prod_{j=1}^{n-s} \frac{1 - q^{\beta_2} \frac{t_j}{x_2}}{1 - \frac{t_j}{x_1}} \frac{\prod_{1\le i<j\le n} (t_i - q^{\gamma} t_j)}{\prod_{j=1}^{n} (1 - \frac{t_j}{x_2})} \right\}$$

$$0 \leq s \leq n$$

と選ぶことができる ([6], [7], [8]).

ここで, $\mathcal{A}$ は交代和の意味である.

このとき, 周期行列

$$(5.2) \quad Y_+(z) = \left(\int_{\langle \zeta_{F_r}^{n-r} \rangle} \Phi \varphi_s(t) \frac{d_q t_1}{t_1} \wedge \cdots \wedge \frac{d_q t_n}{t_n} \right)_{r,s=0}^{n}$$

$$(5.3) \quad Y_-(z) = \left(\int_{\langle \delta_{F_r}^{n-r} \rangle} \Phi \varphi_s(t) \frac{d_q t_1}{t_1} \wedge \cdots \wedge \frac{d_q t_n}{t_n} \right)_{r,s=0}^{n}$$

は, 各々 $z = 0$, $z = \infty$ の漸近展開を指定する q-差分方程式

$$(5.4) \quad Y(qz) = Y(z)\,\Omega(z)$$

($\Omega(z)$ は適当な $(n+1)$ 次有理正方行列)

をみたす. そして, 漸近表示 ($\{\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$, $\{\lambda_0^*, \cdots, \lambda_n^*\}$ は指数系を表わす)

(5.5) $$Y_+(z) \sim V_+(z)\begin{pmatrix} z^{\lambda_0} & & & \\ & z^{\lambda_1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & z^{\lambda_n}\end{pmatrix} C_+ \qquad (z=0)$$

(5.6) $$Y_-(z) \sim V_-(z)\begin{pmatrix} z^{\lambda_0^*} & & \\ & \ddots & \\ & & z^{\lambda_n^*}\end{pmatrix} C_- \qquad (z=\infty)$$

を持つ. ここに, $V_\pm(z)$ は ~~擬~~定数を要素とする対角行列, C_+ は下3角, C_- は上3角行列である.

(5.7) $$Y_0(z) = C_+^{-1} V_+(z)^{-1} Y_+(z)$$

(5.8) $$Y_\infty(z) = C_-^{-1} V_-(z)^{-1} Y_-(z)$$

とおけば, $Y_0(z)$, $Y_\infty(z)$ も又, (5.4) の解であって,

(5.9) $$Y_0(z) \sim C_+^{-1}\begin{pmatrix} z^{\lambda_0} & & \\ & \ddots & \\ & & z^{\lambda_n}\end{pmatrix} C_+ \qquad (z=0)$$

$$(5.10)\quad Y_\infty(z) \sim C_-^{-1}\begin{pmatrix} z^{\lambda_1^*} & & \\ & \ddots & \\ & & z^{\lambda_n^*}\end{pmatrix} C_- \qquad (z=\infty)$$

の表示を持つ．今，

$$(5.11)\quad Y_0(z) = P(z)\,Y_\infty(z)$$

とおくとき，$P(z)$ は $z=0$ と $z=\infty$ の解をつなぐ接続行列である．

(3.6), (3.8), (4.7) より次の公式が成り立つ．

<u>定理3.</u> (i)

$$(5.12)\quad Y_-(z)\,Y_+(z)^{-1}$$

$$= A'(z)^{-1} H^{(n)}(x_2, x_1; \alpha_1, \beta_2, \beta_1)\,{}^t\!A'(q^{\beta_1-\beta_2} z)\, H^{(n)}(x_1, x_2; \alpha_1, \beta_1, \beta_2),$$

ここで

$$A'(u) = \begin{pmatrix} & & & a_{0n}(q^{\beta_2-(n-1)\gamma}u) \\ & & a_{1,n-1}(q^{\beta_2-(n-2)\gamma}u) & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ a_{n0}(q^{\beta_2+\gamma}u) & & & \end{pmatrix}$$

(ii)

$$P(z)^{-1} = Y_\infty(z)\, Y_0(z)^{-1} \tag{5.13}$$

$$= C_-^{-1}\, V_-(z)^{-1}\, Y_-(z)\, Y_+(z)^{-1}\, V_+(z)\, C_+$$

さらに注目すべきことは，基底 $\{\varphi_s\}_{s=0}^{n}$ に関する q-差分方程式 (5.4) の $\Omega(z)$ は $q^{\alpha_1}, q^{\beta_1}, q^{\beta_2}, q^{\gamma}$ にのみ依存し， q そのものには依存しない．これは松尾[6]の中で示されている([7]も参照)．

このような条件の下では，接続行列 $P(z)$ から $\Omega(z)$ が直接求められてしまう．実際，次の定理が成り立つ．

定理4.

$$\lim_{q \to 0} P(z)^{-1} = \Omega(z)\,\Omega(0)^{-1} \tag{5.14}$$

$$\Omega(0) = C_+^{-1} \begin{pmatrix} q^{\lambda_0} & & & \\ & q^{\lambda_1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & q^{\lambda_n} \end{pmatrix} C_+ \tag{5.15}$$

この事実は，通常の差分方程式や微分方程式の場合に比較して，驚くべきことと言わねばならない．

例. $n=1$ の場合

$$\varphi_0 = \frac{1-q^{\beta_2}\frac{t_1}{x_2}}{(1-\frac{t_1}{x_1})(1-\frac{t_1}{x_2})}$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{1-\frac{t_1}{x_2}}$$

$$Y_+ = \begin{pmatrix} \int_{\langle q^{-\beta_1}x_1\rangle} \Phi\varphi_0 \frac{d_qt_1}{t_1}, & \int_{\langle q^{\beta_1}x_1\rangle} \Phi\varphi_1 \frac{d_qt_1}{t_1} \\ \int_{\langle x_2q\rangle} \Phi\varphi_0 \frac{d_qt_1}{t_1}, & \int_{\langle x_2q\rangle} \Phi\varphi_1 \frac{d_qt_1}{t_1} \end{pmatrix}$$

$$Y_- = \begin{pmatrix} \int_{\langle x_1q\rangle} \Phi\varphi_0 \frac{d_qt_1}{t_1}, & \int_{\langle x_1q\rangle} \Phi\varphi_1 \frac{d_qt_1}{t_1} \\ \int_{\langle q^{\beta_2}x_2\rangle} \Phi\varphi_0 \frac{d_qt_1}{t_1}, & \int_{\langle q^{\beta_2}x_2\rangle} \Phi\varphi_1 \frac{d_qt_1}{t_1} \end{pmatrix}$$

q-差分方程式 (5.4) において，$\Omega(z)$ は

$$\Omega(z)=\begin{pmatrix} \dfrac{z-1}{z-q^{\beta_2}}, & q^{\alpha_1}\dfrac{(1-q^{\beta_1})z}{z-q^{\beta_2}} \\ \dfrac{1-q^{\beta_2}}{z-q^{\beta_2}}, & q^{\alpha_1}\dfrac{(q^{\beta_1}z-q^{\beta_2})}{z-q^{\beta_2}} \end{pmatrix}$$

で与えられる．$\Omega(z)$ は $q^{\alpha_1}, q^{\beta_1}, q^{\beta_2}$ のみに依存し，q そのものには依存しない（[6], [7]）．

$$\Omega(0)=\begin{pmatrix} q^{\beta_2}, & 0 \\ 1-q^{\beta_2}, & q^{\alpha_1} \end{pmatrix}$$

$$\Omega(\infty)=\begin{pmatrix} 1, & q^{\alpha_1} \\ 0, & q^{\alpha_1+\beta_1} \end{pmatrix}$$

すなわち　$\lambda_0=-\beta_2$，$\lambda_1=\alpha_1$

$\lambda_0^*=0$，$\lambda_1^*=\alpha_1+\beta_1$

$$C_+ = \begin{pmatrix} c_0 & \\ & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ \frac{1-q^{\beta_2}}{1-q^{\alpha_1+\beta_2}}, & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_- = \begin{pmatrix} c_0^* & \\ & c_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & q^{\alpha_1} \frac{1-q^{\beta_1}}{1-q^{\alpha_1+\beta_1}} \\ & 1 \end{pmatrix}$$

$$c_0 = q^{\beta_2-\beta_1(\alpha_1+\beta_2)} \frac{\Gamma_q(-\alpha_1-\beta_1-\beta_2+1)}{\Gamma_q(-\beta_1+1)\Gamma_q(-\alpha_1-\beta_2+1)}$$

$$c_1 = \frac{\Gamma_q(\alpha_1)\,\Gamma_q(\beta_2)}{\Gamma_q(\alpha_1+\beta_2)}$$

$$c_0^* = \frac{\Gamma_q(\alpha_1)\Gamma_q(\beta_1)}{\Gamma_q(\alpha_1+\beta_1)}$$

$$c_1^* = q^{\beta_1-(\alpha_1+\beta_1)\beta_2} \frac{\Gamma_q(-\alpha_1-\beta_1-\beta_2+1)}{\Gamma_q(-\beta_2+1)\Gamma_q(-\alpha_1-\beta_1+1)}$$

$$V_+(z) = \begin{pmatrix} v_0(z) & \\ & 1 \end{pmatrix}, \quad V_-(z) = \begin{pmatrix} 1 & \\ & v_1^*(z) \end{pmatrix}$$

$$v_0(z) = \frac{\vartheta(z^{-1}q^{-\beta_1})}{\vartheta(z^{-1}q^{\beta_2-\beta_1})}(zq^{\beta_1})^{\beta_2}, \quad v_1^*(z) = \frac{\vartheta(zq^{-\beta_2})}{\vartheta(zq^{\beta_1-\beta_2})}(z^{-1}q^{\beta_2})^{\beta_1}$$

$$Y_-(z)Y_+(z)^{-1} = \begin{pmatrix} f_{00}, & f_{01} \\ f_{10}, & f_{11} \end{pmatrix}$$

$$f_{00} = -q^{\alpha_1\beta_1-\beta_1}(q)_\infty^3 \frac{\vartheta(z^{-1})\vartheta(q^{\beta_1-\beta_2}z)\vartheta(q^{-\alpha_1-\beta_1-\beta_2})}{\vartheta(q^{\beta_1})\vartheta(q^{-\alpha_1-\beta_2})\vartheta(q^{-\beta_2}z)\vartheta(q^{\beta_1}z^{-1})}$$

$$f_{01} = z^{-\alpha_1}\frac{\vartheta(q^{-\alpha_1-\beta_2}z)\vartheta(q^{-\beta_2})}{\vartheta(q^{-\alpha_1-\beta_2}z)\vartheta(q^{-\alpha_1-\beta_2})}$$

$$f_{10} = -z^{\alpha_1}q^{\alpha_1(\beta_1-\beta_2)}\frac{\vartheta(q^{-\alpha_1-\beta_1}z^{-1})\vartheta(q^{-\beta_2})}{\vartheta(q^{\beta_1}z^{-1})\vartheta(q^{-\alpha_1-\beta_2})}$$

$$f_{11} = q^{-\alpha_1\beta_2}\frac{\vartheta(q^{-\beta_2})}{(q)_\infty^3\,\vartheta(q^{-\alpha_1-\beta_2})}$$

$q^{\alpha_1}=a_1$, $q^{\beta_1}=b_1$, $q^{\beta_2}=b_2$ を固定して,

$q\to 0$ $(\alpha_1, \beta_1, \beta_2 \to 0)$ とすれば

$\lim_{q\to 0} C_\pm$, $\lim_{q\to 0} V_\pm(z)$, $\lim_{q\to 0} Y_-(z)Y_+(z)^{-1}$

はすべて存在し,

$$\lim_{q\to 0} Y_\infty(z)Y_0(z)^{-1}$$

$$= \lim_{q\to 0} C_-^{-1}V_-(z)^{-1}Y_-(z)Y_+(z)^{-1}V_+(z)C_+$$

$$= \Omega(z)\Omega(0)^{-1}$$

をたしかめることができる．但し

$$\Omega(0) = C_+^{-1}\begin{pmatrix} q^{-\beta_2} & \\ & q^{\alpha_1} \end{pmatrix} C_+ .$$

(右辺は q そのものにはよらないことに注意)

定理4 の成立する根拠については別の機会にゆずる．

文献

[1] 青本和彦（庵原謙治記述） q差分 de Rham コホモロジーにおける接続公式, in Infinite Analysis Lec Note No.9 (1994), 51—61

[2] K. Aomoto and Y. Kato, Connection formula of symmetric A-type Jackson integrals, Duke Math. J. 74(1994), 129−143

[3] K. Kadell, A proof of Askey's conjectured q-analogue of Selberg's integral and conjecture of Morris, SIAM J. Math. Anal. 19 (1988), 969−986.

[4] J. Kaneko, q-Selberg integrals and Macdonald polynomials, preprint, 1994.

[5] K. Aomoto, On a theta product formula for the symmetric A-type connection function, Osaka J. Math. 32(1995), 35−39

[6] A. Matsuo, Quantum algebra structure of certain Jackson integrals, Commun. Math. Phys., 157 (1993), 479−498.

[7] K. Mimachi, Holonomic q-difference system of the first order associated with a Jackson integral of Selberg type, Duke Math. J., 73(1994), 453−468.

[8] N.Y. Reshetikhin, Jackson type integrals, Bethe vectors, and solutions to a difference analog of the Knizhnik-Zamolodchikov system, Lett. Math. Phys., 26(1992), 153–165.

[9] K. AOMOTO and Y. Kato, Gauss decomposition of connection matrices and application to Yang-Baxter equation, I, II, Proc. Japan Acad. 69(1993), 238–242; 341–344.

[10] A. Varchenko, Quantized Knizhnik-Zamolodchikov equations, quantum Yang-Baxter equation, and difference equations for q-hypergeometric functions, preprint, 1993.

[11] K. AOMOTO and Y. Kato, Gauss decomposition of connection matrices for symmetric A-type Jackson integrals, preprint 1995.

[12] K. AOMOTO, Connection formulas in the q-analog de Rham cohomology, preprint, 1994, to appear in Proc dedicated to Prof. I.M. Gelfand's 80th birthday.